Groupe A

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

Avertissement

Le candidat peut traiter les questions dans l'ordre de son choix. En particulier il peut aborder III *et* V *avant* II *et* IV. *Pour chaque question qu'il traite, le candidat doit* D'ABORD *donner une réponse puis, si possible, une preuve. Il peut, à ses risques et périls, utiliser les résultats qu'il aura énoncés même s'il n'est pas parvenu à les démontrer.*

Le problème concerne des parties du plan complexe $\mathbb{C}$ muni de sa structure euclidienne usuelle.

I

Soit H un demi-plan délimité par une droite L et H' son complémentaire. Pour t positif, on note f_t la transformation de $\mathbb{C}$ dont la restriction à H' est l'identité et qui a même restriction à H que l'affinité orthogonale d'axe L et de rapport t.

1° Pour quels couples (x, y) l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ $t \longmapsto |f_t(x) - f_t(y)|$ est-elle croissante? strictement croissante?

2° L'application $(x, t) \longmapsto f_t(x)$ de $\mathbb{C} \times]0, +\infty[$ dans $\mathbb{C}$ est-elle continue?

3° Pour quelles valeurs de $t \geqslant 0$ f_t transforme-t-elle toute partie convexe en une partie convexe?

$A \cap L = B \cap L$. Comparer l'ensemble des t positifs tels que B contienne $f_t(A)$ à l'ensemble des t positifs pour lesquels $f_t(A)$ est convexe.

5° Si A est une partie de $\mathbb{C}$ et x un point de A, on dit que x est un *sommet* de A lorsque x n'est pas dans l'enveloppe convexe de $A - \{x\}$. Suffit-il, pour qu'une partie de $\mathbb{C}$ soit contenue dans l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses sommets, qu'elle soit ouverte? fermée? finie? bornée?

II

On dira qu'une partie A de $\mathbb{C}$ est *épanouie* si pour tout couple (x, y) de points distincts dans A, on a $|x - y| \geqslant 2$. On note E_n l'ensemble des parties épanouies à n éléments et $E_{n,s}$ l'ensemble des parties épanouies à n éléments et s sommets. On note R_n (resp. $R_{n,s}$) la borne inférieure de l'ensemble des rayons des boules de $\mathbb{C}$ contenant un élément de E_n (resp. $E_{n,s}$).

1° On note $R'_{n,s}$ la borne inférieure de l'ensemble des réels r tels qu'il existe une boule fermée de rayon r contenant un élément de $E_{n,s}$ dont les s sommets sont sur la frontière de la boule. Comparer $R_{n,s}$ à $R'_{n,s}$.

2° Soit Γ un arc de cercle fermé de rayon $R > 0$ et d'angle au centre α avec $0 < \alpha \leqslant 2\pi$. Pour quelles valeurs de n existe-t-il un élément de E_n contenu dans Γ?

3° Pour $n \geqslant 3$, calculer $R_{n,n}$ et $R_{n,n-1}$.

4° Pour $n \leqslant 7$, calculer R_n.

5° Donner un équivalent simple de $\operatorname{Log} R_n$.

6° Disons qu'un élément A de E_n est *coincé* s'il est contenu dans une boule fermée de rayon R_n. Pour quelles valeurs de n est-il vrai que tout élément coincé de E_n contient deux points x et y vérifiant $|x - y| = 2$?

7° La suite R_n est-elle strictement croissante?

8° Est-il vrai que pour tout élément coincé A, il existe une isométrie g de $\mathbb{C}$, distincte de l'identité et vérifiant $g(A) = A$?

9° Est-il vrai que pour tout n et pour tout couple (A, B) d'éléments coincés de E_n, il existe une isométrie g de $\mathbb{C}$ vérifiant $g(A) = B$?

10° Existe-t-il dans chaque E_n un élément coincé?

11° Soit s_n une suite vérifiant $R_{n,s_n} = R_n$. Donner un équivalent simple de $\operatorname{Log}\operatorname{Log} s_n$.

III

On note E l'ensemble de toutes les parties épanouies de $\mathbb{C}$ et E_∞ l'ensemble de celles qui sont infinies. Soient x et y deux points distincts d'un élément A et y dans A vérifie :

$$\left| z - \frac{x+y}{2} \right| > \left| \frac{x-y}{2} \right|.$$

1° Existe-t-il, pour tout A dans E_n, et pour tout couple (x, y) de points distincts de A, une suite finie $a_0, a_1, \ldots, a_m$ de points de A avec $a_0 = x$, $a_m = y$ et, pour $i = 0, \ldots, m-1$, $\{a_i, a_{i+1}\}$ vitale?

2° Même question dans E_x.

3° Pour A dans E et x dans A, on définit le *petit* et le *grand jardin* de x (pour A), le *jardin* de A et la *haie* de A par :

$$PJ_A(x) = \{ y \in \mathbb{C} \mid \forall z \in A - \{x\},\ |z - y| > |x - y| \}$$

$$GJ_A(x) = \{ y \in \mathbb{C} \mid \forall z \in A;\ |z - y| \geqslant |x - y| \}$$

$$J_A = \bigcup_{x \in A} PJ_A(x)$$

$$H_A = \mathbb{C} - J_A.$$

Est-il vrai que pour tout A dans E et tout x dans A, $PJ_A(x)$ est convexe? fermé? ouvert? que l'adhérence de $PJ_A(x)$ est $GJ_A(x)$?

4° Soit A non vide dans E. Combien existe-t-il d'applications continues de J_A dans A induisant l'identité de A?

5° Soit A dans E et $\{x, y\}$ une paire vitale dans A. Décrire $PJ_A(x)$, $GJ_A(x)$, J_A et H_A au voisinage du segment $[x, y]$.

6° Existe-t-il deux éléments distincts A et A′ de E vérifiant $H_A = H_{A'}$ et tels qu'il existe x dans A avec $GJ_A(x)$ borné?

7° Existe-t-il deux éléments distincts A et A′ de E vérifiant $H_A = H_{A'}$ et ayant un point commun?

8° On note E(0) l'ensemble des éléments de E contenant 0 et, pour h réel au moins égal à 2, on note E(0, h) l'ensemble des éléments de E contenant 0 et h. Calculer $\bigcap_{A \in E(0,h)} PJ_A(0)$ en fonction de h.

IV

1° Calculer la partie entière de R_{12} et celle de R_{10}.

2° Calculer R_n.

3° Existe-t-il un élément coincé A contenant au moins deux points dont l'un, x, est tel que, pour tout y dans A, $|x - y|$ diffère de 2?

V

1° Calculer la borne inférieure, pour A dans E(0), de l'aire de $PJ_A(0)$.

2° Donner un équivalent simple de R_n.